2. Lösungsweg der im FA 2/26 gestellten Multiresonanz-Preisfrage

Gefragt war, welche Resonanzfrequenzen bei der Reihenschaltung eines Parallel- mit einem Serienschwingkreis auftreten, wenn deren einzelnen Resonanzfrequenzen bei jeweils 10 MHz liegen und identische Kapazitäts- und Induktivitätswerte zum Einsatz kommen.

Ausgehend von der Thomsonschen Schwingungsgleichung $f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{(LC)}}$

und daraus folgend $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ergeben sich als Blindwiderstände der

Kondensatoren $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ und der Spulen $X_L = \omega \cdot L$. Daraus folgen als

Blindwiderstand des Serienschwingkreises $X_S = \frac{\omega^2 \cdot LC - 1}{\omega \cdot C}$ und des

Parallelschwingkreises $X_P = \frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot LC}$.

Wie bekannt, ist bei einem Serienschwingkreis der Blindwiderstand im Resonanzfall gleich null. Und wie ebenfalls bekannt, ist bei einem Parallelschwingkreis der Blindwiderstand im Resonanzfall unendlich groß.

In der Reihenschaltung beider Schingkreise berechnet sich der

Blindwiderstand zu: $X_{PS} = X_S + X_P = \frac{\omega^2 \cdot LC - 1}{\omega \cdot C} + \frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot LC}$

Nach der Umstellung auf einen gemeinsamen Nenner und dem

Ausmultiplizieren erhält man: $X_{PS} = \frac{\omega^4 (LC)^2 - 3\,\omega^2 \cdot LC + 1}{\omega \cdot C(\omega^2 \cdot LC - 1)}$

Wenn der Nenner zu Null wird, liegt eine Parallelresonanz vor, da diese genau der Resonanz des Parallelschwingkreises entspricht, nach Aufgabenstellung 10 MHz.

Wenn der Zähler zu Null wird, liegt eine Serienresonanz vor. Um die Gleichung zu vereinfachen, wird $\omega^2 = x$ gesetzt, sodass sich die quadratische Gleichung $x^2 \cdot (LC)^2 - x \cdot 3 \cdot LC + 1 = 0$ ergibt.

Als Lösungen erhält man: $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot LC}$

Durch Ersetzen von $\omega = \sqrt{x}$ ergibt sich: $\omega_{1/2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot LC}}$

Unter Anwendung der Resonanzgleichung $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sind die Bauelementewerte für die Lösung nicht mehr erforderlich. Es ergibt sich: $\omega_{1/2} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$ bzw. $f_{1/2} = f_0 \cdot \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Nach dem Ziehen der Wurzel und dem Einsetzen der vorgegebenen Resonanzfrequenz $f_0 = 10\,MHz$ ergeben sich für die Werte der beiden Serienresonanzen:

$f_{S1} = 1{,}618 \cdot 10\,MHz = 16{,}18\,MHz$

$f_{S2} = 0{,}618 \cdot f_0 = 0{,}618 \cdot 10\,MHz = 6{,}18\,MHz$

Somit sind drei Resonanzfrequenzen vorhanden: Parallelresonanz bei 10 MHz und Serienresonanz bei 6,18 MHz und 16,18 MHz.